2/3/2018
3º μάθημα

Πρόταση

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και έστω $V_1, \dots, V_k$ υπόχωροι του E. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(1) Το άθροισμα $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ είναι ευθύ

(2) Αν $\mathcal{B}_i$: βάση του V_i $1 \leq i \leq k$ τότε

$$\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i : \text{ βάση του } V_1 + V_2 + \dots + V_k$$

Απόδειξη

Έστω $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1^{\,1}, \dots, \vec{e}_n^{\,1}\}$ βάση του V_1

$\vdots$

$\mathcal{B}_k = \{\vec{e}_1^{\,k}, \dots, \vec{e}_n^{\,k}\}$ βάση του V_k

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ είναι βάση

Έστω $\vec{x}_1 \in V_1, \dots, \vec{x}_k \in V_k$ και υποθέτουμε $\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_k = \vec{0}$

έχω $\mathcal{B}_i$ βάση του V_i $1 \leq i \leq k \Rightarrow$ $\vec{x}_1 = \lambda_{11}\vec{e}_1^{\,1} + \dots + \lambda_{1n_1}\vec{e}_{n_1}^{\,1}$

$\vdots$

$\vec{x}_k = \lambda_{k1}\vec{e}_1^{\,k} + \dots + \lambda_{kn_k}\vec{e}_{n_k}^{\,k}$

και άρα $\lambda_{11}\vec{e}_1^{\,1} + \dots + \lambda_{1n_1}\vec{e}_{n_1}^{\,1} + \dots + \lambda_{k1}\vec{e}_1^{\,k} + \dots + \lambda_{kn_k}\vec{e}_{n_k}^{\,k} = \vec{0}$

και επειδή $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ είναι βάση του $V_1 + \dots + V_k$

έπεται ότι

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_{11} = \dots = \lambda_{1n_1} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_{k1} = \dots = \lambda_{kn_k} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{x}_i = \vec{0}$$

και άρα το άθροισμα $V_1 + \dots + V_k$ είναι ευθύ.

Πρόταση

Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και έστω $V_1, V_2, \dots, V_k$ υπόχωροι του E. Τ.Α.Ε.Ι.

1) Το άθροισμα $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ είναι ευθύ
2) $\dim_{\mathbb{K}}(V_1 + V_2 + \dots + V_k) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dots + \dim_{\mathbb{K}} V_k$ (**)

Απόδειξη

① ⇒ ②: Έστω ότι το άθροισμα των υποχώρων είναι ευθύ.
Έστω $\mathcal{B}_1$ βάση του $V_1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V_1 = |\mathcal{B}_1|$

⋮

$\mathcal{B}_k$ βάση του $V_k \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V_k = |\mathcal{B}_k|$

Επειδή το άθροισμα $V_1 + V_2 + \dots + V_k$ είναι ευθύ, από την προηγούμενη πρόταση έπεται ότι:

$\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$ βάση του $V_1 + \dots + V_k$. Τότε: $\dim_{\mathbb{K}}(V_1 + \dots + V_k) = |\mathcal{B}| = \left|\bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i\right| =$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{k} |\mathcal{B}_i| = \sum_{i=1}^{k} \dim_{\mathbb{K}} V_i$$

(*) Γενικά αν $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι σύνολα ενός συνόλου X και $X_i \cap X_j = \emptyset$ αν $1 \le i \ne j \le k$ τότε $\left|\bigcup_{i=1}^{k} X_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |X_i|$

Αν για κάποιους δείκτες i, j με $1 \le i \ne j \le k$ ισχύει ότι $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j \ne \emptyset$
$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in \mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j$. Όμως $\left.\begin{array}{l} \bar{x} \in \mathcal{B}_i \subseteq V_i \\ \bar{x} \in \mathcal{B}_j \subseteq V_j \end{array}\right\} \Rightarrow \bar{x} \in V_i \cap V_j = \{\vec{0}\}$ διότι το άθροισμα $V_1 + \dots + V_k$ είναι ευθύ.

Άρα, $\vec{x} = \vec{0}$ άτοπο, διότι το $\bar{x} \in \mathcal{B}_i$ και άρα είναι Γ-Α.
Επομένως, $\mathcal{B}_i \cap \mathcal{B}_j = \emptyset$, $1 \le i \ne j \le k$

② ⇒ ① Αν $k=1$ τότε η απόδειξη είναι προφανής.
Αν $k=2$, από την υπόθεση θα έχουμε
$\dim_{\mathbb{K}}(V_1 + V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2$

Όμως $\dim_{\mathbb{K}}(V_1+V_2) = \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dim_{\mathbb{K}} V_2 - \dim_{\mathbb{K}}(V_1 \cap V_2) \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}}(V_1 \cap V_2) = 0$

$\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$

Τότε γνωρίζουμε ότι το άθροισμα V_1+V_2 είναι ευθύ.

Με επαγωγή έπεται το ζητούμενο. ! Ασκηση !

Πόρισμα
Έστω E: $\mathbb{K}$-δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και $V_1, \dots, V_k$ είναι υπόχωροι του E.
Τότε: $E = V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_k \iff \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} V_1 + \dots + \dim_{\mathbb{K}} V_k$

Ορισμός
Αν $E = V \oplus W$, τότε ο υπόχωρος W καλείται ευθύ συμπλήρωμα του V.

Θεώρημα
Αν E: $\mathbb{K}$-δ.χ. πεπερασμένης διάστασης και V είναι ένας υπόχωρος του E. Τότε ο V έχει ευθύ συμπλήρωμα δηλαδή υπάρχει υπόχωρος W του E έτσι ώστε: $E = V \oplus W$.

Απόδειξη

Έστω $B' = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k\}$ βάση του V. Τότε μπορούμε να συμπληρώσουμε την B' σε μια βάση.

$B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots \vec{e}_n\}$ βάση του n.

Θέτουμε $W = \langle \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n \rangle$. Τότε από το προηγούμενο πόρισμα θα έχουμε: $n = \dim_{\mathbb{K}} E = k + n - k = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W \Rightarrow E = V \oplus W$.

Παρατήρηση: Το ευθύ συμπλήρωμα ενός υπόχωρου δεν είναι μοναδικό, δηλαδή
$$\left.\begin{array}{l} E = V \oplus W \\ E = V \oplus W' \end{array}\right| \not\Rightarrow W = W' \quad \text{Όμως} \quad W \underset{\text{ισόμορφα}}{\cong} W'$$

$$\left.\begin{array}{l} \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W \\ \quad = \dim_{\mathbb{K}} V + \dim_{\mathbb{K}} W' \end{array}\right| \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} W = \dim_{\mathbb{K}} W \xRightarrow{\text{Γ.Α.}} W \cong W'$$

Παράδειγμα: Έστω $E=\mathbb{R}^2$ και έστω $V=\langle(1,0)\rangle=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$

$$W_1=\langle(0,1)\rangle=\{(0,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\in\mathbb{R}\}$$
$$W_2=\langle(1,2)\rangle=\{(x,2x)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$$
$$\vdots$$
$$W_n=\langle(n-1,n)\rangle=\{((n-1)x,nx)\in\mathbb{R}^2 \mid x\in\mathbb{R}\}$$

Τότε $\mathbb{R}^2=V\oplus W_n$ $\forall n\geq 1$ διότι το σύνολο $\{(1,0),(n-1,n)\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^2$: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ n-1 & n \end{vmatrix}=n\neq 0.$

Για παράδειγμα $W_1\neq W_2$ διότι αν $W_1=W_2$ τότε $(0,1)\in W_2$
$\Rightarrow (0,1)=(x,2x)$
$\Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,1)=(0,0)$
άτοπο

Παρόμοια, $W_i\neq W_j$ $\forall i,j$, $i\neq j$
και $W_i\cong W_j$, $\forall i,j\geq 1$.

Παράδειγμα: $V=\{(x,y)\in\mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$

$$=\{(x,y,-x-y)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in\mathbb{R}\}=\{(x,0,-x),\ (0,y,-y)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in\mathbb{R}\}$$

$$=\{x(1,0,-1),\ y(0,1,-1)\in\mathbb{R}^3 \mid x,y\in\mathbb{R}\}=\langle \underbrace{(1,0,-1),\ (0,1,-1)}_{\text{Είναι βάση;}} \rangle$$

Είναι βάση; για να είναι πρέπει να είναι γραμ. ανεξ.

Άμεσα, βλέπουμε ότι το $\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$ είναι βάση.

Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \{(1,0,-1),(0,1,-1),(0,0,1)\}$ βάση του $\mathbb{R}^3$

Θέτοντας $W=\langle(0,0,1)\rangle=\{(0,0,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z\in\mathbb{R}\}$ έχουμε ότι $\mathbb{R}^3=V\oplus W$

Άσκηση: $V=\langle \vec{x}_1=(1,-1,1,3),\ \vec{x}_2=(2,-5,3,10),\ \vec{x}_3=(3,3,1,1)\rangle$

Να βρεθεί ένα ευθύ συμπλήρωμα του V στον $\mathbb{R}^4$.

Λύση

Βρίσκουμε μια βάση του V ως εξής:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 10 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 \mapsto r_3-3r_1]{r_2\mapsto r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3\mapsto r_3+2r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τότε εύκολα βλέπουμε ότι τα διανύσματα $(1,-1,1,3),(0,-3,1,4)$ είναι βάση του V. Άρα, $\dim_{\mathbb{R}} V=2$

→

Επειδή $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \Rightarrow (0,0,1,0),\ (0,0,0,1)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^4$.

Θέτοντας $W = \langle (0,0,0,1), (0,0,1,0) \rangle = \{(0,0,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid z, w \in \mathbb{R}\}$ έχουμε $\mathbb{R}^4 = V \oplus W$.

Ορισμός

Μια γραμμική $f: E \to E$ καλείται προβολή $f^2 = f$.

$[\Leftrightarrow \forall \bar{x} \in E: f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{x})]$

Άσκηση: Αν $f: E \to E$ είναι μια προβολή τότε:

$E = \ker(f) \oplus Im(f)$

Λύση

f: προβολή $\Rightarrow \forall \bar{x} \in E \quad f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{x})$

$\Rightarrow f(f(\vec{x})) - f(\vec{x}) = \vec{0}$

$\Rightarrow f(f(\vec{x}) - \vec{x}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{x}) - \vec{x} \in \ker(f) \Rightarrow \vec{x} - f(\vec{x}) \in \ker(f)$.

↳ επειδή f γραμμική

$\Rightarrow \vec{x} - f(\vec{x}) = \vec{y} \in \ker(f) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{x} = \underbrace{\vec{y}}_{\in \ker f} + \underbrace{f(\vec{x})}_{\in Im(f)} \Rightarrow \bar{x} \in \ker(f) + Im(f) \Rightarrow \boxed{E = \ker(f) + Im(f)}$ (1)

Έστω $\vec{x} \in \ker f \cap Im(f) \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} \in \ker(f) \\ \bar{x} \in Im(f) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(\vec{x}) = \vec{0} \\ \exists \vec{y} \in E : f(\vec{y}) = \vec{x} \end{cases}$

$\Rightarrow f^2(\vec{y}) = \vec{0}$. Όμως $f^2(\vec{y}) = f(\vec{y}) = \vec{x}$. Άρα, $\vec{x} = \vec{0}$.

Άρα, $\boxed{\ker(f) \cap Im(f) = \{\vec{0}\}}$ (2). Από (1) (2) $\Rightarrow E = \ker f \oplus Im f$

Παράδειγμα: Έστω $E = V \oplus W$

Τότε $\forall \vec{x} \in E : \vec{x} = \vec{y} + \vec{w}$ (μοναδική γραφή) όπου $\begin{cases} \vec{y} \in V \\ \vec{w} \in W \end{cases}$

Ορίζουμε $f : E \to E$, $f(\vec{x}) = \vec{y}$ όπου $\vec{x} = \underset{\in V}{\vec{y}} + \underset{\in W}{\vec{w}}$ (μοναδική γραφή)

Εύκολα βλέπουμε ότι η f: γραμμική

Τότε $f^2(\vec{x}) = f(f(\vec{x})) = f(\vec{y}) = \vec{y} = f(\vec{x}) \Rightarrow f^2 = f \Rightarrow f$: προβολή.

Έστω $f : E \to E$ γραμμική απεικόνιση : ενδομορφισμός του E και έστω ότι $\dim_{\mathbb{K}} E = n < \infty$

Έστω ότι $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ βάση του E : $f(\vec{e_1}) = \lambda_1 \vec{e_1}$

$f(\vec{e_2}) = \lambda_2 \vec{e_2}$

$\vdots$

$f(\vec{e_n}) = \lambda_n \vec{e_n}$

Τότε $\forall \vec{x} \in E : \vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}$

και τότε $f(\vec{x}) = f(x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}) =$

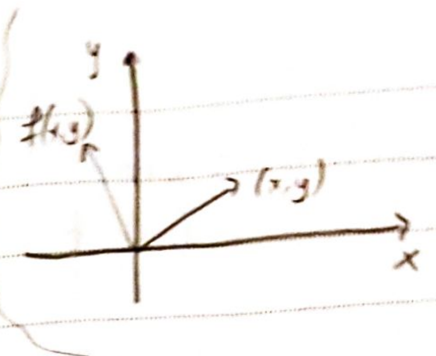
$= x_1 f(\vec{e_1}) + \dots + x_n f(\vec{e_n})$

$= x_1 \lambda_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \lambda_n \vec{e_n}$.

Τότε $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Πρόβλημα Διαγωνοποίησης Για Ενδομορφισμούς

Υπάρχει βάση $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ στον E : $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ να είναι διαγώνιος;



Παράδειγμα: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(-y,x)$ (*)

Έστω $\lambda\in\mathbb{R}$: $f(x,y)=\lambda(x,y) \Rightarrow (-y,x)=\lambda(x,y)$

$\Rightarrow (-y,x)=(\lambda x,\lambda y)$

$\Rightarrow -y=\lambda x$ και $x=\lambda y$

$\Rightarrow \lambda^2 y=-y \Rightarrow \underline{(\lambda^2+1)}\,y=0 \Rightarrow y=0$ και $x=0$

Άρα, το μόνο διάνυσμα $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $f(x,y)=\lambda(x,y)$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$ είναι το μηδενικό. Άρα, δεν υπάρχει βάση $\mathcal{B}=\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ του $\mathbb{R}^2$ έτσι ώστε $f(\vec{e}_1)=\lambda_1\vec{e}_1$ και $f(\vec{e}_2)=\lambda_2\vec{e}_2$. Άρα, η f <u>δεν</u> διαγωνοποιείται.

Στους μιγαδικούς η f διαγωνοποιείται γιατί $\lambda^2+1=0 \Rightarrow \lambda^2=-1$ $\boxed{\lambda=i}$

Πρόβλημα Διαγωνοποίησης για Τετραγωνικούς Πίνακες

Αν $A\in M_n(\mathbb{K})$ υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας P: $P^{-1}\cdot A\cdot P=$ διαγώνιος;

Δηλαδή είναι κάθε τετραγωνικός πίνακας όμοιος με ένα διαγώνιο πίνακα;

(*) $f(1,0)=(0,1)$

$f(0,1)=(-1,0)$

$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ δεν διαγωνοποιείται.